

## Mathématiques

### Préparation de la rentrée

## I Bienvenue

Bienvenue en PTSI !

Ce document est un mélange de rappels et d'exercices d'entraînements. Il a pour but de vous permettre d'aborder la rentrée dans les meilleures dispositions possibles. Il n'est pas nécessaire (voire contre-productif) de s'avancer sur le programme de PTSI (nous ferons cela ensemble !), mais il est par contre indispensable de débiter l'année avec des connaissances solides du programme de lycée.

Ces quelques pages doivent être parcourues méticuleusement, et les exercices doivent tous avoir été soigneusement cherchés d'ici le 1<sup>er</sup> septembre. Il est donc fortement conseillé de travailler sur ce document bien en amont de la rentrée.

Je reste à votre disposition tout au long de l'été pour répondre à vos questions. Pour cela, n'hésitez pas à me contacter par mail à l'adresse

`louise.benoit@ac-montpellier.fr` .

## II Symboles et notations

Les symboles mathématiques ne sont pas des abréviations de mots français. Il faut considérer les mathématiques comme une langue à part, et il s'agit de ne pas mélanger le français et les maths. Il faut par contre savoir traduire les phrases de français en une succession de symboles mathématiques et réciproquement.

Voici une liste de symboles mathématiques couramment utilisés et leur "traduction" en français :

- ★  $\forall$  signifie **quel que soit** ou **pour tout** ;
- ★  $\exists$  signifie **il existe au moins un** ;
- ★  $/$  ou  $,$  ou  $;$  signifient **tel que** ;
- ★  $\exists!$  signifie **il existe un unique** ou encore **il existe exactement un** ;
- ★  $\Rightarrow$  signifie **implique** ou **donc** ;
- ★  $\Leftrightarrow$  signifie **équivalent à** ou **revient à** ou **si et seulement si** ;
- ★  $x \in E$  se traduit par **l'élément  $x$  appartient à l'ensemble  $E$**  ou bien  **$x$  est un élément de l'ensemble  $E$**  ;
- ★  $F \subset E$  signifie **l'ensemble  $F$  est inclus dans  $E$**  ou bien **tout élément de  $F$  est un élément de  $E$** .

La liste suivante présente différents ensembles à connaître :

- ★  $\mathbb{N}$  désigne l'ensemble des entiers naturels :  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$  ;
- ★  $\mathbb{Z}$  désigne l'ensemble des entiers relatifs :  $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$  ;
- ★  $\mathbb{Q}$  désigne l'ensemble des nombres rationnels (quotient de deux entiers relatifs) :  $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^* \right\}$  ;
- ★  $\mathbb{R}$  désigne l'ensemble des nombres réels ;
- ★  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  désigne l'ensemble des réels qui ne sont pas des nombres rationnels, on les appelle irrationnels ; par exemple  $\sqrt{2}$  et  $\pi$  sont des nombres irrationnels ;
- ★  $\mathbb{C}$  désigne l'ensemble des nombres complexes (nous retravaillerons sur cet ensemble, nouveau pour ceux n'ayant pas suivi l'option maths expertes).

On rappelle la succession d'inclusions d'ensembles suivante :  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ .

**Exercice 1.** Un peu d'orthographe

Réécrire les phrases suivantes en les complétant :

- 1) En r... . . . . nant par r... . . . . nce, on concl... final... ment que la propri... est vraie pour tout entier.
- 2) Cardan a rés... . . . . les équations de deg... 3. Les formules avaient été établ... auparavant par Tartaglia.
- 3) L'équation de la tang... . . . . en  $O$  à la courbe de sinus est  $y = x$ .
- 4) Dans  $\mathbb{R}^*$ , le nombre 0 a été excl...  $\mathbb{R}^*$  n'est pas un interv..., mais il est incl... dans  $\mathbb{C}$ .
- 5) 6 est un nombre p..., 7 est un nombre imp... et  $\sqrt{2}$  est un nombre ir... . . . . nel.
- 6) Le logarithme est défi... pour tout réel strictement positif.
- 7) On défi... la racine cubique d'un réel  $a$  comme l'unique réel de cube  $a$ . On rés... donc l'équation  $x^3 = a$ .
- 8)  $\binom{n}{k}$  se lit " $k$  parm...  $n$ ".

### III Calcul

Tous les exercices de ce document sont à faire sans calculatrice ! Certains peuvent vous sembler faciles, mais il est très important de maîtriser toutes ces techniques de calcul pour pouvoir se concentrer sur les notions nouvelles qui seront présentées dans l'année. C'est pourquoi je vous invite à bien vous entraîner. Quand ils interviennent,  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont des réels non nuls.

#### 1) Premiers exercices

##### a. Fractions

**Exercice 2.** Écrire sous la forme d'une fraction, la plus simple possible :

$$A = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}; \quad B = \frac{3}{2a} + \frac{5}{b}; \quad C = \frac{3}{2a} - \frac{1}{ab}; \quad D = \frac{1}{2a} + \frac{1}{6a} + \frac{1}{a}; \quad E = \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3}; \quad F = \frac{2}{ab} + \frac{3}{a^2} + \frac{4}{b^2}.$$

**Exercice 3.** Écrire sous la forme d'une fraction irréductible :

$$\begin{aligned} A &= \frac{4}{2} \times \frac{7}{5}; & B &= \frac{2}{5} \times \frac{5}{9}; & C &= \frac{7}{8} \times \frac{6}{5}; & D &= \frac{-2}{5} \times \frac{3}{-7} \times \frac{-7}{2}; \\ E &= \frac{6}{35} \times \frac{14}{3} \times \frac{1}{2}; & F &= \frac{2^3}{5^2} \times \frac{3^5}{2^7} \times \frac{5^3}{3^3}; & G &= \frac{14^4 \times 6^3}{18^2 \times 49}; & H &= \frac{55^3 \times 26^2}{65^3 \times 44^2}. \end{aligned}$$

**Exercice 4.** Écrire sous la forme d'un entier ou d'une fraction irréductible :

$$\begin{aligned} A &= \frac{2}{3} - \frac{4}{3} \times \frac{2}{5}; & B &= 1 + \frac{1}{\frac{1}{2}}; & C &= \frac{7}{3} \left( 2 - \frac{11}{4} \right); & D &= \frac{1 + \frac{1}{7}}{1 + \frac{1}{3}}; \\ E &= \frac{-3}{5} \times \frac{5}{\frac{-6}{13}}; & F &= \frac{4}{\frac{2}{3} - \frac{5}{6}}; & G &= \frac{5}{7} + \left( \frac{3}{2} \right)^2; & H &= \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{5}}{\frac{1}{3} \times \frac{1}{4}}. \end{aligned}$$

##### b. Racines carrées

Rappelons que ces exercices sont à faire sans calculatrice !

**Exercice 5.** Écrire les expressions suivantes sous la forme  $a\sqrt{b}$  avec  $a$  et  $b$  entiers naturels,  $b$  étant le plus petit possible.

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{40} = \sqrt{4 \times 10} = \sqrt{2^2 \times 10} = 2\sqrt{10} \\ B &= \sqrt{99} = \sqrt{\dots \times \dots} = \sqrt{\dots \times \dots} = \dots\sqrt{\dots} \\ C &= \sqrt{54} = \sqrt{\dots \times \dots} = \sqrt{\dots \times \dots} = \dots\sqrt{\dots} \\ D &= \sqrt{63} = \sqrt{\dots \times \dots} = \sqrt{\dots \times \dots} = \dots\sqrt{\dots} \\ E &= \sqrt{32} = \sqrt{\dots \times \dots} = \sqrt{\dots \times \dots} = \dots\sqrt{\dots} \\ F &= \sqrt{288} = \sqrt{\dots \times \dots} = \sqrt{\dots \times \dots} = \dots\sqrt{\dots} \\ G &= \sqrt{845} = \sqrt{\dots \times \dots} = \sqrt{\dots \times \dots} = \dots\sqrt{\dots} \\ H &= \sqrt{847} = \sqrt{\dots \times \dots} = \sqrt{\dots \times \dots} = \dots\sqrt{\dots} \end{aligned}$$

**Exercice 6.** Simplifier les expressions suivantes :

$$A = \sqrt{\frac{9}{7}}; \quad B = \sqrt{\frac{16}{5}}; \quad C = \sqrt{\frac{2}{9}}; \quad D = \sqrt{\frac{5}{36}}.$$

**Exercice 7.** Réécrire les expressions suivantes en supprimant la racine du dénominateur :

$$A = \frac{2}{\sqrt{3}}; \quad B = \frac{14}{\sqrt{7}}; \quad C = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}; \quad D = \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad E = \sqrt{\frac{7}{4}}.$$

**Exercice 8.** Utiliser la quantité conjuguée pour faire disparaître la racine au dénominateur dans les expressions suivantes :

$$A = \frac{2}{\sqrt{2}+1} = \frac{2(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} = \dots \quad B = \frac{2}{1+\sqrt{3}} \quad C = \frac{-3}{5-\sqrt{2}}; \quad D = \frac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}; \quad E = \frac{\sqrt{5}-3}{3+\sqrt{5}}.$$

**Exercice 9.** Réduire les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} A &= 3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - 7\sqrt{2} + 2\sqrt{2}; & B &= 5\sqrt{5} - 6\sqrt{3} - 8\sqrt{3} + \sqrt{5}; \\ C &= 3\sqrt{7} - 3\sqrt{5} - 5\sqrt{7} + 7\sqrt{5}; & D &= -4\sqrt{11} + 11\sqrt{13} + 13\sqrt{11}. \end{aligned}$$

**Exercice 10.** Simplifier les calculs suivants :

$$\begin{aligned} A &= (\sqrt{5})^2; & B &= (5\sqrt{2})^2; & C &= (-2\sqrt{3})^2; & D &= (2\sqrt{11})^2; \\ E &= 7\sqrt{2} \times 3\sqrt{2}; & F &= 2\sqrt{5} \times 5\sqrt{7}; & G &= 3\sqrt{2} \times 4\sqrt{5}; & H &= 7\sqrt{3} \times (-2\sqrt{3}). \end{aligned}$$

**Exercice 11.** Simplifier les calculs suivants :

$$\begin{aligned} A &= \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}; & B &= \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{3}{\sqrt{2}}; & C &= \frac{4}{1-\sqrt{2}} + \frac{3}{1+\sqrt{2}}; & D &= (1+2\sqrt{5})(2-5\sqrt{5}); \\ E &= (1+3\sqrt{2})(1-3\sqrt{2}); & F &= (3+7\sqrt{2})(2\sqrt{2}-11); & G &= 2\sqrt{7} + \sqrt{28}; & H &= 4\sqrt{3} - \sqrt{48}; \\ I &= 5\sqrt{2} + 3\sqrt{98} - 2\sqrt{242}; & J &= \sqrt{1+\frac{4}{5}}; & K &= \left(\sqrt{7-2\sqrt{6}} + \sqrt{7+2\sqrt{6}}\right)^2. \end{aligned}$$

### c. Puissances

**Exercice 12.** Écrire les expressions suivantes sous la forme d'un entier ou d'une fraction irréductible :

$$A = 7^{-1}; \quad B = 2^3 \times 3^{-2}; \quad C = \frac{2^9}{2^5}; \quad D = \frac{2^{-3}}{5^{-2}}; \quad E = \left(\frac{3}{2^2}\right)^2; \quad F = (2^{-4} \times 5^2)^2.$$

**Exercice 13.** Écrire les expressions suivantes sous la forme d'une puissance de  $a$  :

$$A = a^7 \times a^2 \times a^5; \quad B = \frac{1}{a^3 \times a^4}; \quad C = \frac{a^{-5} \times a^2}{a^3 \times a^{-7}}; \quad D = (a^{-2} \times a^7)^3; \quad E = \frac{(a^7)^3}{(a^{-2})^{-6}}; \quad F = \left(\frac{a^{-3}}{a^5}\right)^7.$$

**Exercice 14.** Écrire les expressions suivantes sous la forme  $a^n b^p c^q$  avec  $n, p$  et  $q$  des entiers relatifs :

$$A = \frac{a^2 \times b^5 \times c^7}{a^3 \times b^2 \times c^2}; \quad B = \frac{1}{b^3} \times \frac{ac}{b^2} \times \frac{a^3 b^2}{c^4}; \quad C = \left(\frac{a}{b}\right)^3 \times \frac{a^{-2}}{c^{-3}} \times \left(\frac{b^{-2}}{c^3}\right)^2.$$

**Exercice 15.** Écrire les expressions suivantes sous la forme d'une seule fraction :

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3}; & B &= \frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{bc}; & C &= \frac{a}{bc} + \frac{b}{ac} + \frac{c}{ab}; \\ D &= \frac{1}{a^2 b^5} + \frac{1}{a^3 b^3}; & E &= \frac{2a}{b^3 c^2} + \frac{3b}{a^2 c^3}; & F &= \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}. \end{aligned}$$

**Exercice 16.** Factoriser les expressions suivantes à l'aide d'un facteur commun

$$A = 3a^2 + 6a;$$

$$B = 4ab - 6a^2;$$

$$C = a^3b^2 + a^4b + a^2b^3;$$

$$D = 6a^5b^3 - 2a^4 + 14a^2b;$$

$$E = a^2b^6c + a^3bc^4 + ab^3c^2;$$

$$F = 15a^5b^3c^2 - 35a^2b^6c^4 + 10a^5b^4c^2.$$

## 2) Quelques formules de calcul algébrique

Ces formules sont à connaître par coeur, et dans les deux sens ! Cela signifie qu'il faut aussi être capable de les reconnaître et de les utiliser pour factoriser une expression.

**Propriété 1.** Soient  $a$ ,  $b$  et  $c$  des réels. On a les égalités suivantes :

$$\star (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$\star (a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

$$\star (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$\star a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$\star a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2).$$

*Remarque.* Les cas particuliers fréquents avec  $b = 1$  ou  $b = -1$  donnent  $a^3 - 1 = (a-1)(a^2 + a + 1)$  et  $a^3 + 1 = (a+1)(a^2 - a + 1)$ .

**Propriété 2.** Pour  $a$  et  $b$  deux réels positifs non tous nuls, on a  $\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{a-b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$ .

**Propriété 3.** Pour tout réels  $a$ ,  $b$  et  $x$ , on a  $(x-a)(x-b) = x^2 - (a+b)x + ab$ .

**Théorème 1.** Le couple de réels ou de complexes  $(a, b)$  est solution du système  $\begin{cases} a+b=s \\ ab=p \end{cases}$

si et seulement si  $a$  et  $b$  sont les racines du trinôme  $X^2 - sX + p$ , c'est à dire

si et seulement si  $a$  et  $b$  sont les solutions, réelles ou complexes, de l'équation  $x^2 - sx + p = 0$  d'inconnue  $x$ .

## 3) Exercices de réduction, développement et factorisation

**Exercice 17.** Réduire les expressions suivantes :

$$A = 2x \times 5x;$$

$$B = (-7x) \times 3x;$$

$$C = 3x^2 \times (-x);$$

$$D = 7x^2 \times 2x^2;$$

$$E = (-5x) \times (-2x^7);$$

$$F = 3x \times 2x^2 \times (-x^3);$$

$$G = 2x + 3x - 4x;$$

$$H = x^2 + x - 3x^2;$$

$$I = x - x \times x;$$

$$J = \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}x;$$

$$K = x - \frac{x}{3};$$

$$L = 0,1x^2 + \frac{9x^2}{10}.$$

**Exercice 18.** Développer puis réduire les expressions suivantes :

$$A = x(3 - 5x);$$

$$B = -2(x - 3);$$

$$C = (4x - 5)(7x - 1);$$

$$D = (2x + 5)(7x - 3);$$

$$E = (-4x - 6)(2x - 1);$$

$$F = (x + 1)(x + 2)(x + 3);$$

$$G = (x - 8)(x^2 + 3x + 5);$$

$$H = (3 - 2x + 5x^2)(4x + 1);$$

**Exercice 19.** Écrire les expressions suivantes sous la forme d'un quotient (les dénominateurs sont supposés non nuls) :

$$A = \frac{2}{x+3} + \frac{1-3x}{x+2};$$

$$B = \frac{4-3x}{2x+5} - \frac{2x^2}{7-3x};$$

$$C = \frac{4-3x}{x} - \frac{1+2x}{x^2}.$$

**Exercice 20.** Développer les expressions suivantes à l'aide d'identités remarquables :

$$A = (2x + 3)^2;$$

$$B = (4x - 5)^2;$$

$$C = (2x + 5)(2x - 5);$$

$$D = (8x - 11)^2;$$

$$E = (x - 8)^2;$$

$$F = (-3 - \sqrt{2}x)(-3 + \sqrt{2}x).$$

**Exercice 21.** Factoriser les expressions suivantes :

$$A = 3x + 6; \quad B = 2a - 4b; \quad C = 3x^2 + x; \quad D = x^5 - x^4; \quad E = 3xy - x^2; \quad F = ax^3 - a^5b^4.$$

**Exercice 22.** Factoriser les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} A &= (5x + 1)(2x + 3) + (5x + 1)(x + 2); & B &= (4x - 5)(7x - 1) - (4x - 5)(3x + 4); \\ C &= (2x + 5)(7x - 3) + 2x + 5; & D &= (4x - 6)(2x - 1) + (2x - 3)(8x - 11); \\ E &= (x - 8)(5 + 3x) - (x - 8)(7 - x); & F &= (3 - 2x)(4x + 1) + (x + 1)(-2x + 3); \\ G &= (2x + 3)^2 + (2x + 3)(x + 2); & H &= (4x - 5)(7x - 1) - (4x - 5)^2. \end{aligned}$$

**Exercice 23.** Factoriser les expressions suivantes à l'aide d'identités remarquables :

$$\begin{aligned} A &= x^2 - 1; & B &= 4x^2 - 9; & C &= (3x + 1)^2 - 25; & D &= (2 - 5x)^2 - 9x^2; & E &= x^2 + 2x + 1; \\ F &= 4x^2 - 4x + 1; & G &= 9 + 18x + 9x^2; & H &= 25x^2 - 100x + 100; & I &= 2x^2 - \sqrt{24}x + 3. \end{aligned}$$

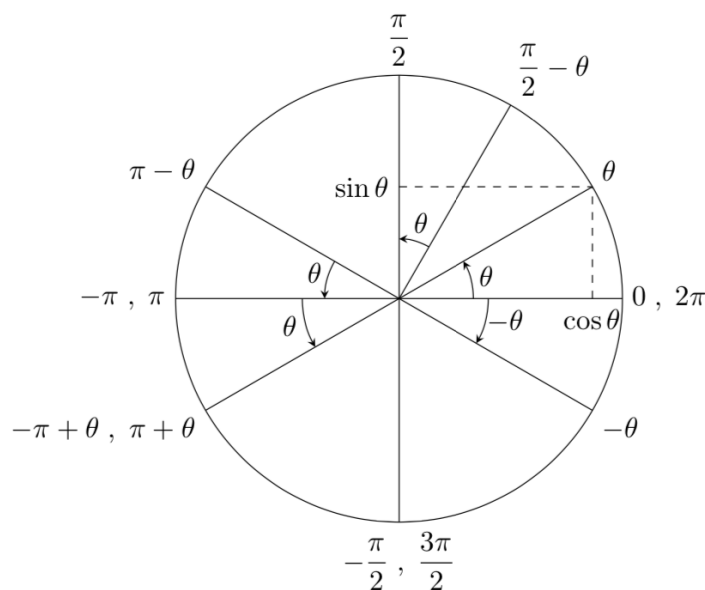
**Exercice 24.** Factoriser dans  $\mathbb{R}$  les expressions suivantes en utilisant le discriminant quand cela est possible :

$$A = x^2 - 3x - 10; \quad B = 2x^2 + x - 1; \quad C = 3x^2 - 7x + 4.$$

## IV Trigonométrie

### 1) Cercle trigonométrique et valeurs remarquables

Le cercle trigonométrique est représenté ci-dessous. Ce cercle, nommé également *cercle unité* est de rayon 1. Les angles congrus modulo  $2\pi$  sont séparés par une virgule.

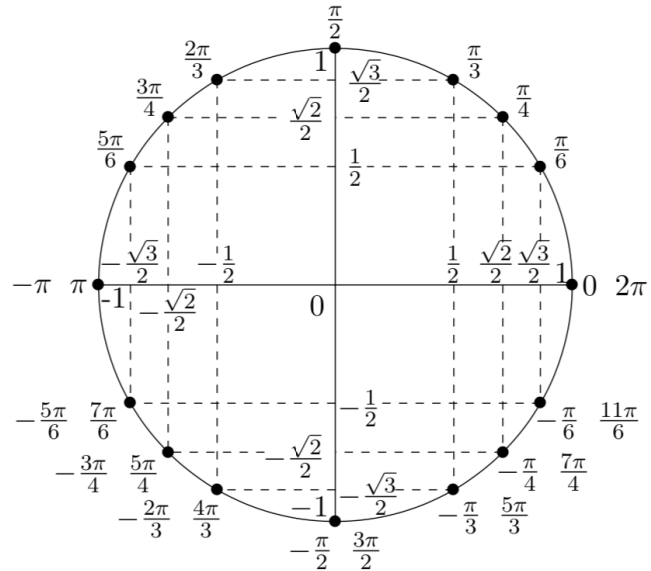


**Définition.** Si  $\theta$  est un réel dont le cosinus est non nul (c'est à dire qu'il n'est pas de la forme  $\frac{\pi}{2} + k\pi$  où  $k \in \mathbb{Z}$ ), on définit la tangente de cet angle  $\theta$  par  $\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$ .

*Remarque.* On pourra écrire  $\cos \theta$  sans parenthèses plutôt que  $\cos(\theta)$  quand l'argument de la fonction est simple. En revanche, on doit mettre les parenthèses dans  $\cos(2\theta)$ ,  $\cos(\theta + \pi)$  ou pour toute expression autre que  $\theta$ . Ceci est valable pour les autres fonctions sin et tan, mais aussi plus généralement pour toute autre fonction. De même, on pourra utiliser la notation  $\cos^2 a$  plutôt que  $(\cos(a))^2$  quand cela ne prête pas à confusion.

Le tableau suivant récapitule les valeurs usuelles des fonctions trigonométriques, et le cercle permet de les visualiser. Ils sont à connaître absolument par coeur.

| $\theta$       | 0 | $\frac{\pi}{6}$      | $\frac{\pi}{4}$      | $\frac{\pi}{3}$      | $\frac{\pi}{2}$ |
|----------------|---|----------------------|----------------------|----------------------|-----------------|
| $\sin(\theta)$ | 0 | $\frac{1}{2}$        | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1               |
| $\cos(\theta)$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$        | 0               |
| $\tan(\theta)$ | 0 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1                    | $\sqrt{3}$           | non défini      |



## 2) Formules de trigonométrie

Les formules qui suivent sont également à connaître par coeur. Elles sont vraies dès que la fonction tangente est correctement définie.

### Propriété 4. Formules d'addition.

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$

### Propriété 5. Formules de duplication.

$$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$$

$$\tan(2a) = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$$

$$\sin(2a) = 2 \sin a \cos a$$

### Propriété 6. Formules de linéarisation.

$$\cos^2 a = \frac{1 + \cos(2a)}{2}$$

$$\sin^2 a = \frac{1 - \cos(2a)}{2}.$$

### Propriété 7. Transformation des produits en sommes.

$$\cos a \cos b = \frac{\cos(a-b) + \cos(a+b)}{2}$$

$$\sin a \sin b = \frac{\cos(a-b) - \cos(a+b)}{2}$$

$$\sin a \cos b = \frac{\sin(a+b) + \sin(a-b)}{2}$$

### Propriété 8. Transformation des sommes en produit

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \left( \frac{p+q}{2} \right) \cos \left( \frac{p-q}{2} \right)$$

$$\cos p - \cos q = -2 \sin \left( \frac{p+q}{2} \right) \sin \left( \frac{p-q}{2} \right)$$

$$\sin p + \sin q = 2 \sin \left( \frac{p+q}{2} \right) \cos \left( \frac{p-q}{2} \right)$$

$$\sin p - \sin q = 2 \cos \left( \frac{p+q}{2} \right) \sin \left( \frac{p-q}{2} \right)$$

**Exercice 25.** Démontrer les propriétés 4 à 8 en utilisant uniquement les formules d'addition de  $\cos(a+b)$  et  $\sin(a+b)$ .

On peut observer sur le cercle trigonométrique, mais aussi déduire des formules d'addition les relations suivantes :

### Propriété 9.

Opposé

$$\cos(-\theta) = \cos \theta$$

$$\sin(-\theta) = -\sin \theta$$

$$\tan(-\theta) = -\tan \theta$$

Demi-tour

$$\cos(\theta + \pi) = -\cos \theta$$

$$\sin(\theta + \pi) = -\sin \theta$$

$$\tan(\theta + \pi) = \tan \theta$$

Supplémentaire

$$\cos(\pi - \theta) = -\cos \theta$$

$$\sin(\pi - \theta) = \sin \theta$$

$$\tan(\pi - \theta) = -\tan \theta$$

Complémentaire

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \theta$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos \theta$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cotan \theta = \frac{1}{\tan \theta}$$

Quart de tour

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin \theta$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos \theta$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\cotan \theta = -\frac{1}{\tan \theta}$$

**Propriété 10.** Pour tout  $n$  dans  $\mathbb{Z}$  et tout  $\theta$  dans  $\mathbb{R}$ , on a 
$$\begin{cases} \cos(\theta + n\pi) = (-1)^n \cos \theta \\ \sin(\theta + n\pi) = (-1)^n \sin \theta. \end{cases}$$

**Exercice 26.** Démontrer la propriété 10 par récurrence. Attention, l'énoncé de récurrence devra dépendre d'un entier naturel.

### 3) Identité fondamentale et sa réciproque

**Propriété 11.** Pour tout réel  $\theta$ , on a  $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ .

Réciproquement, si  $x$  et  $y$  sont deux réels vérifiant  $x^2 + y^2 = 1$ , alors il existe un réel  $\theta$  tel que 
$$\begin{cases} x = \cos \theta \\ y = \sin \theta \end{cases}.$$

*Remarque.* Cette identité traduit l'appartenance du point de coordonnées  $(\cos \theta, \sin \theta)$  au cercle unité, dont l'équation est  $x^2 + y^2 = 1$ .

**Corollaire.** Pour tout réel  $\theta$  dont le cosinus est non nul, on a  $1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$ .

### 4) Exercices

**Exercice 27** (Tangente de l'arc moitié). Soit  $x \in ]-\pi, \pi[$ . On pose  $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ .

Exprimer  $\cos x$ ,  $\sin x$  et  $\tan x$  en fonction de  $t$ .

**Exercice 28.** Si  $\theta \in \left]-\pi, -\frac{\pi}{2}\right[$  et  $\tan \theta = \frac{3}{4}$ , que vaut  $\cos \theta$  ?

**Exercice 29.** 1) Calculer  $p = \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$  et  $s = \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ .

2) En déduire les valeurs exactes de  $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$  et  $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ .

**Exercice 30.** Calculer la valeur exacte de  $\tan \frac{\pi}{8}$  à l'aide d'une formule de duplication.

**Exercice 31.** Résoudre sur  $\mathbb{R}$  et sur  $] -\pi, \pi]$  l'équation  $\cos(x) + \cos(2x) + \cos(3x) = 0$ .

**Exercice 32.** Résoudre sur  $[0, \pi[$  l'équation  $\tan(x) + \tan(4x) = 0$ .

## V Fonctions usuelles

### 1) Généralités

**Notation.** On écrit  $f : x \mapsto f(x)$  pour désigner la fonction qui à  $x$  associe  $f(x)$ .

*Remarque.* Attention de ne pas confondre la **fonction**  $f$  avec l'**expression**  $f(x)$  qui désigne un réel.

Cette distinction est fondamentale. Une analogie qui vous aidera peut-être est de voir la fonction  $f$  comme une recette, le réel  $x$  comme un ingrédient et l'expression  $f(x)$  comme le gâteau.

Il faut en tout cas faire très attention, et bien écrire :

$f$  est continue, croissante, dérivable, paire, etc...

et

$f(x)$  est positif, inférieur à 1, entier, etc...

## 2) Fonctions trigonométriques

### a. Les fonctions sinus et cosinus

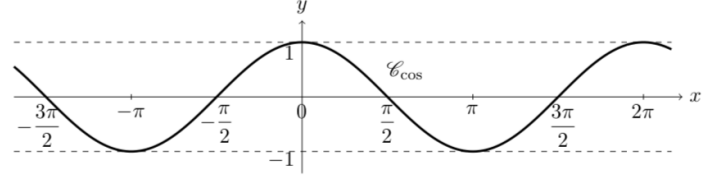
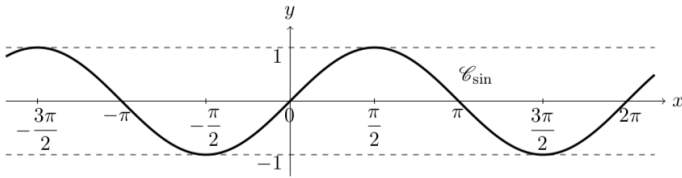
#### Propriété 12.

Les fonctions sinus et cosinus sont définies sur  $\mathbb{R}$ . Elles sont  $2\pi$ -périodiques.  
La fonction sin est impaire, et la fonction cos est paire.

#### Propriété 13.

Les fonctions sinus et cosinus sont dérivables (et donc continues) sur  $\mathbb{R}$ . On a  $\sin'(x) = \cos(x)$  et  $\cos'(x) = -\sin(x)$ .

Voici les courbes représentatives  $\mathcal{C}_{\sin}$  et  $\mathcal{C}_{\cos}$  des fonctions sin et cos sur  $\mathbb{R}$ .



#### Propriété 14.

L'équation de la tangente en 0 à la courbe  $\mathcal{C}_{\sin}$  est  $y = x$ .  
L'équation de la tangente en 0 à la courbe  $\mathcal{C}_{\cos}$  est  $y = 1$ .

### b. La fonction tangente

#### Propriété 15.

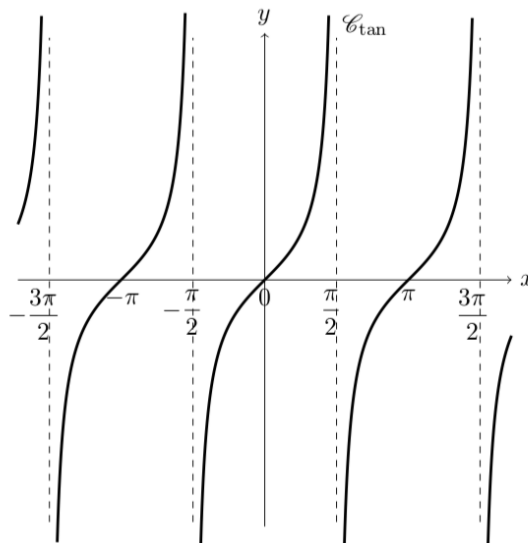
La fonction tangente est définie sur l'ensemble des réels qui ne sont pas de la forme  $\frac{\pi}{2} + k\pi$ , où  $k$  est un entier.  
La fonction tangente est  $\pi$ -périodique et impaire.

**Propriété 16.** La fonction tan est dérivable (et donc continue) en tout point de son ensemble de définition.

On a  $\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$ .

**Propriété 17.** On a  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} \tan(x) = -\infty$ .

Voici la courbe représentative  $\mathcal{C}_{\tan}$  de la fonction tan sur son ensemble de définition. On remarque que toutes les informations précédentes sont "lisibles" sur le graphe.



### 3) Fonctions exponentielle et logarithme népérien

#### a. La fonction exponentielle

**Définition.** La fonction nommée **exponentielle** et notée  $\exp$  est définie comme l'unique solution de l'équation différentielle  $y' = y$  satisfaisant la condition initiale  $y(0) = 1$ .

**Notation** On pourra noter  $\exp(x)$  ou  $e^x$  l'image du réel  $x$  par la fonction exponentielle.

**Propriété 18.**

La fonction exponentielle est définie sur  $\mathbb{R}$ .

**Propriété 19.**

La fonction exponentielle est dérivable (et donc continue) sur  $\mathbb{R}$ . On a  $(e^x)' = e^x$  et  $e^0 = 1$ .

**Propriété 20.**

La fonction exponentielle est strictement positive sur  $\mathbb{R}$ , strictement croissante sur  $\mathbb{R}$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ .

**Propriété 21.**

L'évaluation de la fonction exponentielle en 1 est un nombre réel (irrationnel) nommé **nombre de Neper**. Il vaut  $e = e^1 \simeq 2,71$ .

**Propriété 22.**

L'équation de la tangente en 0 à la courbe représentation de la fonction exponentielle a pour équation  $y = x + 1$ . De plus, le graphe de  $\exp$  est situé au-dessus de cette tangente, autrement dit  $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq x + 1$ .

**Propriété 23.** Règles de calculs avec l'exponentielle :

$$\star e^{a+b} = e^a \times e^b;$$

$$\star e^{-a} = \frac{1}{e^a};$$

$$\star e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b};$$

$$\star \forall n \in \mathbb{Z}, (e^a)^n = e^{na};$$

$$\star e^{\frac{a}{2}} = \sqrt{e^a}.$$

*Remarque.* La notation  $e^x$  prend alors tout son sens, car on peut démontrer (par récurrence) que  $\exp(n) = e^n$  où  $e$  est le nombre de Neper, et  $e^n$  l'opération puissance.

#### b. La fonction logarithme népérien

**Définition.** La fonction  $\exp$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}$  dans  $]0, +\infty[$ . Sa bijection réciproque se nomme fonction **logarithme népérien** et se note  $\ln$ .

$\ln$  est donc une bijection de  $]0; +\infty[$  dans  $\mathbb{R}$  qui à tout réel  $y$  strictement positif associe  $x$ , l'unique antécédent dans  $\mathbb{R}$  de  $y$  par  $\exp$ . Autrement dit :  $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in ]0, +\infty[, x = \ln y \Leftrightarrow y = e^x$ .

**Propriété 24.**  $\forall x \in \mathbb{R}, \ln(e^x) = x$  et  $\forall x \in ]0; +\infty[, e^{\ln x} = x$ . En particulier  $\ln 1 = 0$  et  $\ln(e) = 1$ .

**Propriété 25.** La fonction  $\ln$  est dérivable (et donc continue) sur  $]0, +\infty[$  et  $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ .

**Propriété 26.**

La fonction  $\ln$  est strictement croissante sur  $]0; +\infty[$  et on a  $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ .

**Propriété 27.**

L'équation de la tangente en 1 à la courbe représentative de  $\ln$  a pour équation  $y = x - 1$ . De plus, le graphe de  $\ln$  est situé en-dessous de cette tangente, autrement dit  $\forall x \in ]0, +\infty[, \ln x \leq x - 1$ .

**Propriété 28.** Règles de calculs avec le logarithme :

$$\star \ln(a \times b) = \ln a + \ln b;$$

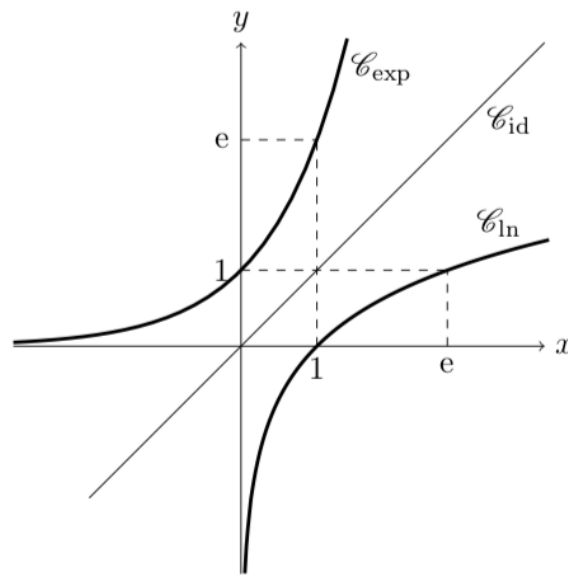
$$\star \ln \frac{1}{a} = -\ln a;$$

$$\star \ln \left( \frac{a}{b} \right) = \ln a - \ln b;$$

$$\star \forall n \in \mathbb{Z}, \ln(a^n) = n \ln(a);$$

$$\star \ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln a.$$

Voici les courbes représentatives des fonctions  $\exp$ ,  $\ln$  et  $\text{id}$ , fonction qui à  $x$  associe  $x$ . On observe la symétrie axiale.



## 4) Exercices

### Définition.

On définit les fonctions **cosinus hyperbolique** et **sinus hyperbolique** par  $\text{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$  et  $\text{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ . Elles sont définies sur  $\mathbb{R}$ . On peut aussi les noter  $\cosh$  et  $\sinh$ .

**Exercice 33.** Calculer (en cas d'existence) :

- 1)  $\text{ch}(\ln 2)$ ;
- 2)  $\text{sh}(\ln 3)$ ;
- 3)  $\ln(\ln(\ln 2))$ .

**Exercice 34.** Résoudre les équations et inéquations suivantes :

- 1)  $\ln\left(\frac{x+3}{4}\right) = \frac{1}{2}(\ln x + \ln 3)$ ;
- 2)  $\text{sh}(x) = -1$ ;
- 4)  $\text{sh}(x) = 2$ ;
- 3)  $\text{ch}(x) = 2$ ;
- 5)  $\text{ch } x = \ln 2$ .

**Exercice 35.** Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Linéariser  $\text{ch}^2 x$  et  $\text{sh}^2 x$ , c'est à dire les écrire à l'aide d'expressions du type  $\text{ch}(kx)$  et  $\text{sh}(kx)$  où les exposants ont disparu.

**Exercice 36.** Soit  $f : x \mapsto \sin x - \frac{2}{3} \sin^3 x$ .

- 1) Montrer qu'on peut restreindre l'étude de  $f$  à l'intervalle  $[0, f\pi 2]$ .
- 2) Étudier les variations de  $f$ .
- 3) Discuter suivant les valeurs du réel  $m$  le nombre de solutions sur  $[-\pi, \pi]$  de l'équation  $f(x) = m$ .

## VI Inégalités

### 1) Opérations sur les inégalités

On considère  $a, b, c$  et  $d$  quatre réels.

**Propriété 29. Somme.** Si  $a \leq b$  et  $c \leq d$  alors  $a + c \leq b + d$ .

*Démonstration.* En utilisant successivement la première puis la deuxième inégalité, on a  $a + c \leq b + c \leq b + d$  d'où le résultat.

*Remarque.* Attention de ne jamais retrancher deux inégalités!

**Propriété 30. Deux encadrements.** Si  $a \leq x \leq b$  et  $c \leq y \leq d$  alors  $a - d \leq x - y \leq b - c$ .

*Démonstration.* On a  $a \leq x \leq b$  et  $-d \leq -y \leq -c$  d'où le résultat par somme en utilisant la propriété 29.

**Propriété 31. Produit.** Si  $0 \leq a \leq b$  et  $0 \leq c \leq d$  alors  $ac \leq bd$ .

*Démonstration.* Les réels étant positifs, en utilisant successivement la première puis la deuxième inégalité, on a  $0 \leq ac \leq bc \leq bd$  d'où le résultat.

Remarque. Attention de bien s'assurer que les réels sont positifs !

**Propriété 32. Quotient.** Si  $0 \leq a \leq c$  et  $0 \leq d \leq b$  alors  $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$ .

*Démonstration.* Les réels étant positifs, on a  $0 \leq \frac{1}{b} \leq \frac{1}{d}$  puis par produit en utilisant la propriété 31 on obtient le résultat.

**Propriété 33.** Soit  $f$  une fonction croissante sur l'intervalle  $I$  et si  $a$  et  $b$  sont dans  $I$  tels que  $a \leq b$ , alors  $f(a) \leq f(b)$ .  
Si  $g$  est une fonction décroissante sur l'intervalle  $J$  et si  $a$  et  $b$  sont dans  $I$  tels que  $a \leq b$ , alors  $g(a) \geq g(b)$ .

Remarque. Si on veut des inégalités strictes, il faut s'assurer que les fonctions sont *strictement* monotones sur l'intervalle considéré.

## 2) Exercices

**Exercice 37.** Soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ . Montrer que  $(a + b)^2 \geq 4ab$ .

**Exercice 38.** Montrer que  $\forall x > 0$ , on a  $\ln(x) \leq x - 1$ .

Indication : on pourra poser  $f(x) = \ln(x) - (x - 1)$  et faire une étude de fonction.

**Exercice 39.** Montrer que  $\forall x > 0$ ,  $x + \frac{1}{x} \geq 2$ .

**Exercice 40.** Montrer que  $\forall (a, b) \in ]0, +\infty[$ ,  $\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ .

**Exercice 41.** Montrer que  $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$ ,  $a + b < 2 + a^2 + b^2$ .

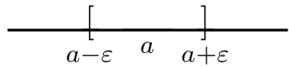
Indication : on pourra poser  $P(x) = x^2 - x + 1$ .

## 3) Valeur absolue

**Propriété 34.** Si  $\varepsilon > 0$ , alors  $|x| \leq \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon \leq x \leq \varepsilon$ .

**Propriété 35.** Si  $\varepsilon > 0$  et  $a \in \mathbb{R}$ , alors  $|x - a| \leq \varepsilon \Leftrightarrow a - \varepsilon \leq x \leq a + \varepsilon$ .

Remarque. Interprétation géométrique :  $\{x \in \mathbb{R}, |x - a| \leq \varepsilon\}$  est appelé **intervalle centré en  $a$  de rayon  $\varepsilon$** .



Remarque. Montrer que  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  est bornée sur  $I$  équivaut à montrer que  $|f|$  est majorée sur  $I$ . C'est utile car cela permet de ne travailler que sur des nombres positifs.

**Exercice 42.** Résoudre l'inéquation  $\left|1 + \frac{1}{x}\right| \geq 1$ .

**Exercice 43.** Tracer la courbe de la fonction  $f : x \mapsto |x + 1| - 2|x - 2|$ .

**Exercice 44.** Montrer que si  $|x| < 1$  et  $|y| < 1$ , alors  $\left|\frac{x+y}{1+xy}\right| < 1$ .

## 4) Équations et inéquations dans $\mathbb{R}$

**Exercice 45.** Résoudre les équations suivantes :

- |                                                           |                                             |                                                                 |                                 |
|-----------------------------------------------------------|---------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------|---------------------------------|
| 1) $2x + 3 = 0$ ;                                         | 2) $-3x + 5 = 0$ ;                          | 3) $-x + 8 = 0$ ;                                               | 4) $12x - 4 = 0$ ;              |
| 5) $\frac{2}{3}x - 6 = 0$ ;                               | 6) $-49 - 42x = 0$ ;                        | 7) $3x - 5 + 7x = 6 - 2x$ ;                                     | 8) $5x + 9 - 3x = 2x - 1 + x$ ; |
| 9) $1 - 3x + \frac{8 - 3x}{2} = x - \frac{3}{2}(2 + x)$ ; | 10) $3x + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}x - 3$ ; | 11) $\frac{3x - 1}{2} - \frac{7x - 11}{6} = \frac{2x + 7}{3}$ . |                                 |

**Exercice 46.** Résoudre les équations suivantes :

1)  $(2x + 3)(2x + 1) = 0$ ;      2)  $(-x - 3)(5x + 2) = 0$ ;      3)  $2x(6x - 3) = 0$ ;      4)  $-3x(1 - 4x)(7x + 4) = 0$ ;  
5)  $x^2 + x = 0$ ;      6)  $(x - 1)^2 = (7x + 3)^2$ ;      7)  $3(x + 4) = 12$ ;      8)  $3x^2 = 7x$ ;

**Exercice 47.** Résoudre les équations suivantes :

1)  $\frac{2x + 8}{5 - 2x} = 0$ ;      2)  $\frac{3x + 1}{6 - 5x} = 0$ ;      3)  $\frac{4x - 6}{12 - 8x} = 0$ .

**Exercice 48.** Résoudre les équations suivantes :

1)  $\frac{3x + 1}{5 - 2x} = 3$ ;      2)  $\frac{3x - 1}{6 - 5x} = 2$ ;      3)  $\frac{2x^2 - 5x - 31}{x - 3} = 2x$ .

**Exercice 49.** Résoudre les équations suivantes :

1)  $\frac{2}{x - 1} = \frac{5}{3}$ ;      2)  $\frac{x - 1}{2} = \frac{5}{3}$ ;      3)  $\frac{3}{x - 1} = \frac{4}{1 - 2x}$ .

**Exercice 50.** Résoudre les inéquations suivantes :

1)  $2x + 3 > 0$ ;      2)  $-3x + 5 \leq 0$ ;      3)  $-x + 8 \geq 0$ ;      4)  $12x - 4 > -3$ ;      5)  $\frac{2}{3}x - 6 < 0$ ;      6)  $-49 - 42x > 7$ .

**Exercice 51.** Résoudre les inéquations suivantes à l'aide d'un tableau de signe :

1)  $(2x + 6)(3x - 3) > 0$ ;      2)  $(-5x + 10)(-x - 3) \leq 0$ ;      3)  $\frac{3x}{x + 9} > 0$ ;      4)  $\frac{-x + 5}{x + 1} \geq 0$ .